Roll No. ....

D–3558

B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2020

(New Course)

MATHEMATICS

Paper First

(Algebra and Trigonometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Solve any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1\. (अ) दो व्युत्क्रमणीय आव्यूहों P तथा Q को इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि PAQ प्रासामान्य रूप में है, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A की जाति भी ज्ञात कीजिए।

Find two non-singular matrices P and Q such that PAQ is in the normal form, where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Also find the rank of the matrix A.

(ब) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ के सभी अभिलाक्षणिक मूलों को ज्ञात कीजिए तथा उससे सम्बन्धित अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

Find all the eigen values and the corresponding eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(स) दर्शाइये कि आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

अपने अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः A^{-1} ज्ञात कीजिए।

Show that the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

satisfies its own characteristic equation. Hence find A^{-1}.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) ज्ञात कीजिए कि λ, μ के किन मानों के लिए समीकरणों :

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x + y + 3z = 13$$

$$3x + 4y - \lambda z = \mu$$

का (i) कोई हल नहीं, (ii) एक अद्वितीय हल, (iii) अनन्त हल होंगे।

Investigate for what values of λ, μ the equations :

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x + y + 3z = 13$$

$$3x + 4y - \lambda z = \mu$$

have (i) no solution, (ii) an unique solution; (iii) infinite solutions.

(ब) समीकरण $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए, जबकि मूल हरात्मक श्रेणी में हैं।

Find the roots of the equation $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ if they are in harmonic progression (H. P.).

(स) कार्डन विधि से त्रिघात को हल कीजिए :

$$x^3 - 18x - 35 = 0.$$

Solve the cubic by Cardon's method :

$$x^3 - 18x - 35 = 0.$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि समुच्चय A में R एक तुल्यता सम्बन्ध है, तो सिद्ध कीजिए कि R^{-1} भी समुच्चय A में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

If R is an equivalence relation in the set A, then prove that R^{-1} is also an equivalence relation in the set A.

(ब) सिद्ध कीजिए कि इकाई के चतुर्थ मूलों का समुच्चय $\{1, -1, i, -i\}$ गुणन संक्रिया के अन्तर्गत एक परिमित आबेली समूह है।

Show that the set of fourth roots of unity $\{1, -1, i, -i\}$ forms an finite abelian group with respect to multiplication.

(स) सरल समूह को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Define simple group and prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि यदि $f : G \to G'$ कोई समूह समाकारिता है, तो f एकैक होगा यदि और केवल यदि $\ker f = \{e\}$, जहाँ $\ker f$, f की अष्टि है।

Prove that if $f : G \to G'$ is any group homomorphism, then f is one-one if and only if kerl (f) = $\{e\}$, where ker f is the kernel of f.

(ब) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

Prove that every finite integral domain is a field.

(स) सिद्ध कीजिए वलय $(R, +, .)$ का अरिक्त उपसमुच्चय S, $(R, +, .)$ का उपवलय होगा यदि और केवल यदि :

(i) $a - b \in S, \forall\, a, b \in S$ के लिए।

(ii) $a.b \in S, \forall\, a, b \in S$ के लिए।

Prove that a non-empty subset S of the ring (R, +, .) is a subring of (R, +, .) iff :

(i) $a - b \in S, \forall\, a, b \in S$

(ii) $a.b \in S, \forall\, a, b \in S$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) हल कीजिए :

$$x^7 + 1 = 0$$

Solve :

$$x^7 + 1 = 0$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan\left(i \log \frac{a - ib}{a + ib}\right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

Prove that :

$$\tan\left(i \log \frac{a - ib}{a + ib}\right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

(स) श्रेणी का योग कीजिए :

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + ...\infty$$

Sum the series :

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + ...\infty .$$